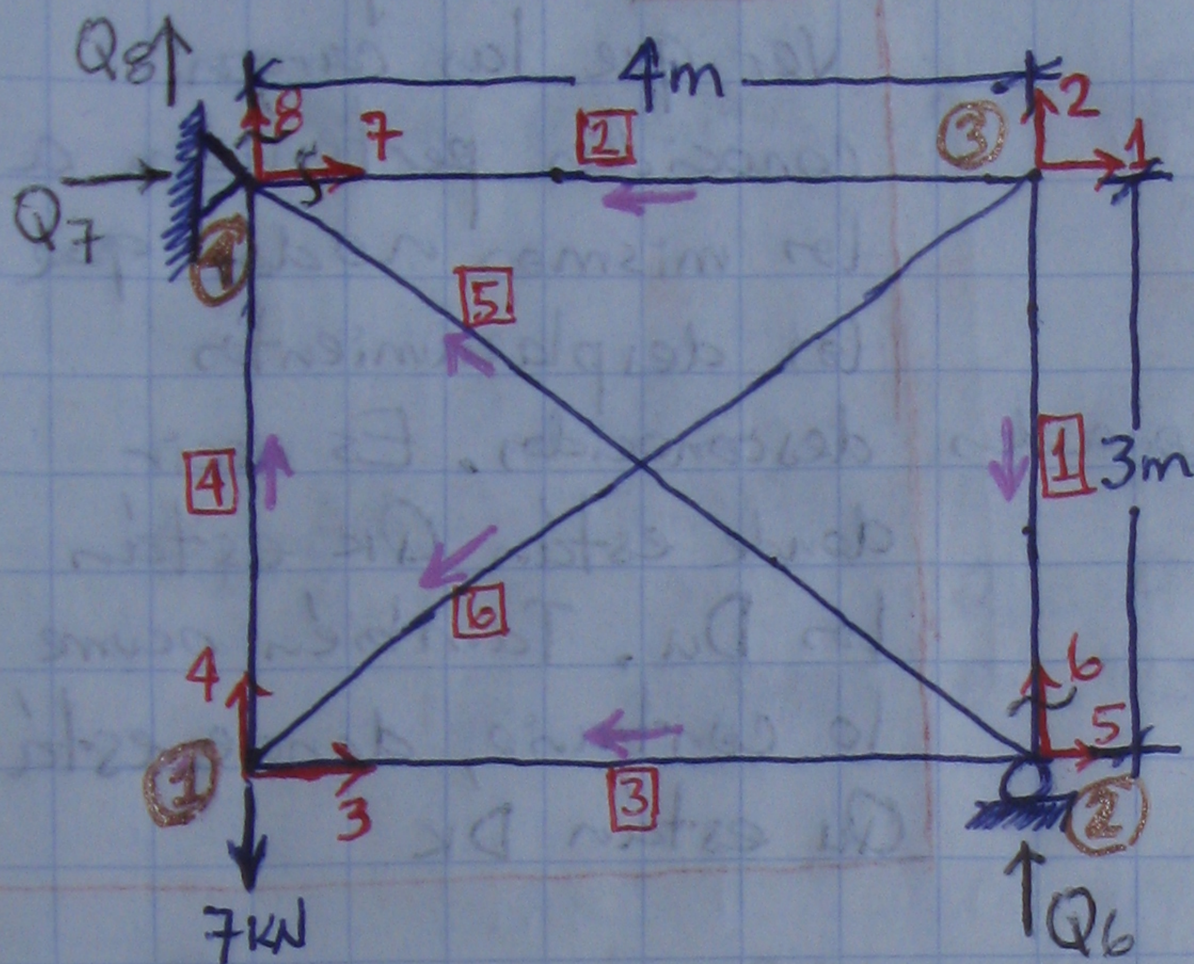
Ejemplo 1:

Determine las reacciones de la cercha y las fuerzas en cada barra. Considere $A = 0.0015 m^2$ y $E = 200 GPa$ para cada barra.



Nota aclaratoria:

✓ Los miembros, grados de libertad y sentidos están especificados en la pag. 684. Ejercicio 14.7.

① Matriz de desplazamientos conocidos Dk:

Se puede ver que generalmente esta matriz corresponde a los grados de libertad restringidos.

$$D_K = \begin{bmatrix} D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} \therefore \quad D_K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② Matriz de desplazamientos desconocidos Du:

Corresponde a los grados de libertad no restringidos.

$$D_u = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

③ Matriz de cargas externas conocidas Qk:

Corresponde a las cargas externas aplicadas en los nodos.

En este ejercicio se puede ver lo siguiente:

- Para el Nodo 1: $Q_3 = 0$, $Q_4 = -7$
- Para el Nodo 2: $Q_5 = 0$, Q_6 es desconocida.
- Para el nodo 3: $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$
- Para el nodo 4: Q_7 y Q_8 ambas son desconocidas.

La matriz de cargas externas conocidas queda:

$$Q_K = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: Se puede ver que las cargas conocidas pertenecen a los mismos nodos que los desplazamientos desconocidos. Es decir donde están Q_K están los D_u. También ocurre lo contrario, donde está Q_u están D_K.

④ La matriz de cargas externas desconocidas

$$Q_u = \begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix}$$

⑤ Matriz de rigidez de toda la estructura:

Para esto es necesario calcular la matriz de rigidez de cada barra y después sumarlas (o ensamblarlas) para obtener la matriz de rigidez total de la estructura.

a) Coordenadas globales de los nodos:

NODO	X	Y
1	0	0
2	4	0
3	4	3
4	0	3

NOTA: Como todas las barras tienen la misma área y el mismo módulo de elasticidad E, entonces la matriz de rigidez de cada miembro quedará indicada en función de AE.

Para el miembro 1:

Nodo cercano: 3 $X_N = 4$; $Y_N = 3$ $L = 3m$

Nodo alejado: 2 $X_F = 4$; $Y_F = 0$

Cosenos directores: $\lambda_x = 0$; $\lambda_y = -1$ (Ecuaciones 14.5 y 14.6 pag. 659).

$$K_1 = AE \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33333 & 0 & -0.33333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.33333 & 0 & 0.33333 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Para el miembro 2:

Nodo cercano: 3 $X_N = 4$; $Y_N = 3$ $L = 4m$

Nodo alejado: 4 $X_F = 0$; $Y_F = 3$

Cosenos directores: $\lambda_x = -1$; $\lambda_y = 0$.

$$K_2 = AE \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Para el miembro 3:

Nodo cercano: 2 $X_N = 4$; $Y_N = 0$ $L = 4m$.

Nodo alejado: 1 $X_F = 0$; $Y_F = 0$

Cosenos directores $\lambda_x = -1$; $\lambda_y = 0$.

$$K_3 = AE \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Para el miembro 4:

Nodo cercano: 1 $\quad X_N = 0$; $Y_N = 0$ $\quad L = 3m$.

Nodo alejado: 4 $\quad X_F = 0$; $Y_F = 3$

Cosenos directores: $\lambda x = 0$; $\lambda y = 1$.

$$K_4 = AE \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33333 & 0 & -0.33333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.33333 & 0 & 0.33333 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Para el miembro 5:

Nodo cercano: 2 $\quad X_N = 4$; $Y_N = 0$ $\quad L = 5m$

Nodo alejado: 4 $\quad X_F = 0$; $Y_F = 3$

Cosenos directores: $\lambda x = -0.8$; $\lambda y = 0.6$

$$K_5 = AE \begin{array}{cc} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0.128 & -0.096 & -0.128 & 0.096 \\ -0.096 & 0.072 & 0.096 & -0.072 \\ -0.128 & 0.096 & 0.128 & -0.096 \\ 0.096 & -0.072 & -0.096 & 0.072 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Para el miembro 6:

Nodo cercano: 3 $\quad X_N = 4$; $Y_N = 3$ $\quad L = 5m$.

Nodo alejado: 1 $\quad X_F = 0$; $Y_F = 0$

Cosenos directores: $\lambda x = -0.8$ $\quad \lambda y = -0.6$

$$K_6 = AE \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura : $K_T = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6$

$$K = AE \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.40533 & -0.096 & -0.072 & 0 & -0.33333 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0.378 & 0.096 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.40533 & 0 & 0 & 0 & -0.33333 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0.378 & -0.096 & -0.128 & 0.096 \\ 0 & -0.33333 & 0 & 0 & -0.096 & 0.40533 & 0.096 & -0.072 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.128 & 0.096 & 0.378 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0 & -0.33333 & 0.096 & -0.072 & -0.096 & 0.40533 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Siempre se debe cumplir que $Q = KD$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ \hline Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|ccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ \hline K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

De esta matriz se puede hacer la división:

$$\begin{bmatrix} Q_K \\ \hline Q_u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_u \\ \hline D_K \end{bmatrix}$$

$Q_K = K_{11} D_u + K_{12} D_K$

$Q_u = K_{21} D_u + K_{22} D_K$.

Como $D_K = 0$

$Q_K = K_{11} D_u \rightarrow [D_u] = [K_{11}]^{-1} [Q_K]$

$Q_u = K_{21} D_u$.

A continuación se muestran los resultados de estas operaciones matriciales.

$$D_u = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.33333/AE \\ -1.3125/AE \\ 6.89063/AE \\ -19.6875/AE \\ 4.55729/AE \end{bmatrix} \qquad Q_u = \begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Estos son los valores de las reacciones.

$Q_6 = 0$, $Q_7 = 0$, $Q_8 = 7\,kN \uparrow$

Fuerzas en cada uno de los miembros:

$$q_F = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$ (Ecuación 14.22 pag 672)

Para el miembro 1:

$$q_1 = \frac{AE}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2.33333/AE \\ -1.3125/AE \\ 4.55729/AE \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$q_1 = -0.4375\,kN$

$\boxed{q_1 = 0.4375\,kN \text{ (Compresión)}}$

Miembro 2:

$$q_2 = \frac{AE}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.33333/AE \\ -1.3125/AE \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$q_2 = -0.58333\,kN$

$\boxed{q_2 = 0.58333\,kN \text{ (Compresión)}}$

Miembro 3:

$$q_3 = \frac{AE}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.55729/AE \\ 0 \\ 6.89063/AE \\ -19.6875/AE \end{bmatrix}\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$q_3 = -0.58333$

$\boxed{q_3 = 0.58333 \text{ (Compresión)}}$

Miembro 4:

$$q_4 = \frac{AE}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.89063/AE \\ -19.6875/AE \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$q_4 = 6.5625$

$\boxed{q_4 = 6.5625 \text{ (Tensión)}}$

Miembro 5:

$$q_5 = \frac{AE}{5}\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4.5579/AE \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$q_5 = 0.729167$

$\boxed{q_5 = 0.729167 \text{ (Tensión)}}$

Miembro 6:

$$q_6 = \frac{AE}{5}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.33333/AE \\ -1.3125/AE \\ 6.89063/AE \\ -19.6875/AE \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$q_6 = 0.729167$

$\boxed{q_6 = 0.729167 \text{ (Tensión)}}$

RESULTADOS FINALES